重负载下竞争-冲突淘汰存取方式 VI类系统模型建模研究

逯昭义[1], 杨兴梅[1,2], 王 超[1]
(1. 青岛大学信息工程学院, 山东青岛 266071; 2. 青岛市人口计生委信息中心, 山东青岛 266071)

摘 要: 多星 LAN 的"竞争-冲突淘汰存取方式"共分六类, 在完成了多星 LAN 的"竞争-冲突淘汰"存取方式 I 类、II 类、III类、IV类、V 类系统模型的数学建模之后, 本文就重负载下 VI类系统模型进行了数学建模, 提出了顾客转移概率 P_{ij}、平稳状态下系统平均队长 $\overline{M}$、顾客平均滞留时间 W 等的算式. 同时进行了模拟试验, 且与IV类、V 类模型进行了比较. 为"竞争-冲突淘汰"存取方式在星形 LAN 的应用奠定了理论基础.

关键词: 多星 LAN; 竞争-冲突淘汰式; 存取方式; 数学模型; 重负载
中图分类号: O226 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2007) 10-1817-06

The Mathematical Modeling for the Contention-Collision Cancellation Access Mode of the VIth System Model to a Multiple Star LAN Under Heavy Load

LU Zhao-yi[1], YANG Xing-mei[1,2], WANG Chao[1]
(1. Information Engineering College, Qingdao University, Qingdao, Shandong 266071, China;
2. Information Center, Qingdao Population Family Plan Committee, Qingdao, Shandong 266071, China)

Abstract: The contention-collision cancellation access mode in multi-star LAN can be divided into six different models according to its working mechanism. The mathematical analysis for the I th, II th, IIIth, IVth and V th models have been presented and discussed. In this paper, the VIth system model under heavy load is studied, gets expressions for the transfer probability of the customers P_{ij}, the mean number of customers in the steady state $\overline{M}$, and the mean detained time of the customers in the system W, and so on. Simulation experient results are compared with the II th and IVth one. So far, the theory foundation of the contention-collision cancellation access mode has been established for its application in star LAN.

Key words: multi-Star LAN; contention-collision cancellation; access mode; mathematical modelling; heavy load

1 引言

关于多星 LAN 的运行机理和设计建造已有报告[1,2]. 关于多星 LAN 的"竞争-冲突淘汰"存取方式的分类及对 I 类、II 类、III类、IV类、V 类系统模型的数学建模已经报告[3~7]. 有关文献[8]中指出: 如果将顾客请求服务权、请求失败后的再一次请求服务权、得到服务权后接受服务的各种情况进行组合, 其系统模型可分为六类, 已有详尽阐述. 本文研究的 VI类系统模型如图 1 所示, 该模型要求: 顾客第 1 次请求、再次请求服务都是随机发生, 获得服务权的一位顾客如果服务失败, 不再保留服务权, 重新请求服务.

本文建立排队模型时, 将多星 LAN 中心结点的交换通道当作服务员, 且设定交换通道数为 1; 将用户终端产生的信息单元当作顾客, 且设定信息单元长度为定长; 将缓冲器当作排队室.

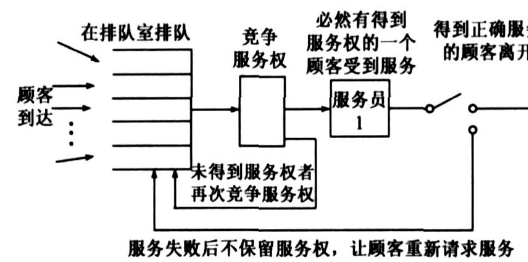


图 1 VI类系统模型图

2 解析条件分析与运算符号设定

2.1 解析条件分析

(1) 时隙的设定 为了在离散条件下解析图 1 所示的系

收稿日期: 2005-11-18; 修回日期: 2007-06-29

统模型, 把时间轴划分为以时隙为单位的小间隔. 选择时隙的原则是一个时隙中每个顾客源最多只能产生 1 个顾客.

(2) 顾客到达　如果某终端在某时隙无顾客, 则它在该时隙随机产生顾客的概率为 $p_g \geqslant 0$, 不产生的概率为 $q_g = 1 - p_g$. 如果该时隙该终端有顾客, 则不产生新顾客.

(3) 请求服务权　根据 Ⅵ类模型的运行机理, 到达缓冲器的顾客立即请求服务. 如果服务员空闲则为有效请求, 服务员从请求服务的顾客中随机选择 1 个进行服务, 其余的顾客被淘汰. 如果服务员正在忙碌, 则为无效请求, 该顾客肯定被淘汰. 两种情况下被淘汰的顾客返回各自的缓冲器, 各源终端分别随机确定一个延时时间重新请求服务. 这里所讲述的情况正是前述的“顾客第一次请求, 再次请求都是随机发生”. 被服务的顾客, 若服务成功, 则离开系统; 若服务失败, 返回排队室, 并再次请求服务.

(4) 顾客被服务　顾客“服务期”设为定长 f 个时隙, 无论该顾客是否被服务成功, 如果经“服务期”后的一个时隙, 系统还有服务请求顾客(包括原有顾客和新产生的顾客), 则服务员经该时隙后又进入“服务期”, 该时隙称为有效请求时隙. 若“服务期”后的一个时隙, 排队室虽然有顾客数 $\geqslant 1$, 但系统内无顾客请求服务, 则服务员进入空闲期. 此空闲期一直持续到有顾客请求的时隙出现, 服务员才又进入服务期. 因此, 在 Ⅵ类系统模型中, 离开期由若干服务期和空闲期两部分组成, 这正是 Ⅵ类系统模型的难点之一. 设一个离开期经 K 次服务成功服务一个顾客, 出现空闲期的总长度为 m 个时隙, 则离开期 $= Kf + m$ 个时隙.

一般来说, 多星 LAN 的工作状态大致可分为两种情况: ①重负载情况, 即认为在系统内每个有效请求时隙都有顾客请求, 服务员在每次“服务时间”后的一个时隙都必有顾客请求, 服务员始终处于忙碌状态, 整个忙期内不会出现空闲期, 如图 2 所示. ②一般负载情况, 由于不能保证有效请求时隙的顾客请求, 所以闲期出现的几率大大增加, 在一个离开期内也有可能出现闲期. 本文解析重负载情况. 关于一般负载情况, 待研究进展后另行报告.

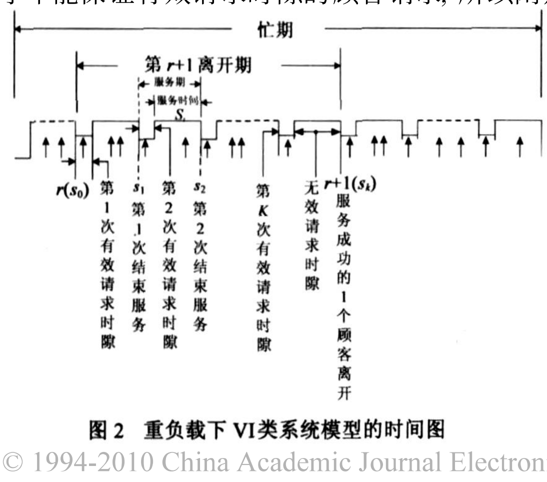


图 2　重负载下 VI 类系统模型的时间图

在图 2 中, r 时点为所选嵌入点, r 时点、$r+1$ 时点系统各离开一个被成功服务的顾客, 在离开期的其他时点不离开顾客. 在离开期的第 K 次有效请求服务时隙, 既有可能到达新顾客, 又必有有效服务请求存在.

2.2　运算符号设定

N:　顾客源总数, $2 \leqslant N < \infty$

X_r:　r 时点系统顾客数, $0 \leqslant X_r \leqslant N-1$, $N = 2, 3, \cdots$

τ_0:　请求服务时隙的大小

T_r:　第 r 个接受服务顾客的离开期, 单位为 τ_0

K:　一个离开期中, 服务员处于服务期的次数.

s_n:　第 $r+1$ 离开期中, K 次服务期结束的时点, $0 \leqslant n \leqslant K$. 其中 s_0 为 r 时点, s_k 为 $r+1$ 时点

x_n:　s_n 时点系统顾客数

p_g:　无顾客的源在 1 个时隙产生 1 个顾客的概率, $q_g = 1 - p_g$

p_r:　有顾客的源在某个时隙提出请求服务的概率

p_f:　服务员经 1 次服务, 成功服务 1 个顾客的概率

p_k:　服务员经 K 次服务, 才能成功服务 1 个顾客的概率. $p_K = p_r(1-p_r)^{K-1}$

P_{ij}:　r 时点系统顾客数为 i, $r+1$ 时点顾客数由 i 变为 j 的转移概率, $0 \leqslant i, j \leqslant N-1$

$X_r^1, X_r^2, \cdots, X_r^f$:　r 时点后的第 1 时隙有 X_r^1 个顾客请求, 第 2 时隙有 X_r^2 个请求, 第 f 时隙有 X_r^f 个请求

$l_1, l_2, \cdots, l_f$:　r 时点后的第 1 时隙有 l_1 个顾客到达, 第 2 时隙有 l_2 个到达, …第 f 时隙有 l_f 个到达

$\bar{M}$:　在平稳状态下, 系统在 r 时点的平均顾客数

π_i:　r 时点, 系统顾客数为 i 的概率

W_q:　顾客在排队室的平均等待时间

W:　顾客在系统的平均滞留时间

3　数学解析

3.1　分析与讨论

设 $X_r = 0$, 由于是重负载, 所以 r 时点后的一个有效请求时隙必有顾客到达, 立即进入服务期.

由前可知, 无论是服务失败还是请求失败, 顾客返回排队室至再次请求的时间间隔都是随机的, 于是, {第 2 有效请求时隙提出请求的顾客数} = (第 2 有效请求时隙内新到达的顾客数) + {重新请求的顾客中在该时隙提出请求的顾客数} = (第 2 有效请求时隙新到达的顾客数) + {重新请求服务的顾客数} $\cdot P_2$　(1)

其中, P_2 为重新请求的顾客中, 在第 2 有效请求时

隙提出请求的概率, 下 $P_3, P_4 \cdots P_k$ 同.

$\because$ {重新请求服务的顾客数} = {s_1 时点的系统顾客数}

$\therefore$ {第 2 有效请求时隙提出请求的顾客数}

= (第 2 有效请求时隙新到达的顾客数) + {s_1 时点的系统顾客数} $\cdot P_2$ (2)

另外, 我们设定随机延时 T 的范围为 $0 \leqslant T \leqslant f$, 则在第1服务期请求的顾客在第2服务期必定再次请求, 但具体哪一时隙提出请求则是随机选择的. 同理, 对于第 2 服务期来说, 顾客请求情况同第1服务期. 依此类推, 得

{第 k 有效请求时隙提出请求的顾客数, $1 \leqslant k \leqslant \infty$}

= (第 k 有效请求时隙新到达的顾客数) + {s_{k-1}时点的系统顾客数} $\cdot P_k$ (3)

3.2 状态转移概率 p_{ij}

设 r 时点系统的顾客数 $X_r = i$, 在 $r+1$ 时点系统的顾客数 $X_{r+1} = j$, $0 \leqslant i, j \leqslant N-1$, 分析图 2 可得

(1) 当 $i = 0$ 时,

$P_{0j} = P\{X_{r+1} = j \mid X_r = 0\}$

$= P$ {在 K 个有效请求服务时隙必有顾客请求, 在 $T_{r+1} = Kf$ 个时隙新到顾客 $j+1$ 个 $\mid X_r = 0$}

$= P$ {在第 1 有效请求时隙新到顾客 l_1 个, 第 1 服务期新到 m_1 个, $1 \leqslant l_1 \leqslant m_1 \leqslant j+1$; 在 $K-1$ 个有效请求时隙必有顾客请求, 在 $T_{r+1} - f = (K-1)f$ 个时隙新到顾客 $j+1-m_1$ 个 $\mid X_r = 0$}

$= P_{A_1}$ {第 1 有效请求时隙到达顾客 l_1 个, s_1 时隙到达顾客 $m_1 - l_1$ 个, $1 \leqslant l_1 \leqslant m_1 \leqslant j+1 \mid X_r = 0$}

$\cdot P_a$ {在 $K-1$ 个有效请求时隙必有顾客请求, 在 $T_{r+1} - f = (K-1)f$ 个时隙新到顾客 $j+1-m_1$ 个 $\mid X_r = 0$}

$$P_{A_1}\{\cdots\} = \sum_{l_1=1}^{j+1} \sum_{m_1=l_1}^{j+1} C_N^{l_1} (p_g)^{l_1} (1-p_g)^{N-l_1} \cdot C_{N-l_1}^{m_1-l_1} (q_g^{f-1})^{N-m_1} (1-q_g^{f-1})^{m_1-l_1} \quad (4)$$

$P_a\{\cdots\} = \sum_{K=1}^{\infty} P$ {服务员经 K 次服务成功一个 $\mid X_r = 0$}

$\cdot P_b$ {在 $K-1$ 个有效请求时隙必有顾客请求, 在 $T_{r+1} - f = (K-1)f$ 个时隙新到顾客 $j+1-m_1$ 个 $\mid X_r = 0$} =

$$\sum_{K=1}^{\infty} P_K \cdot P_b\{\cdots\} \quad (5)$$

$P_b\{\cdots\} = P_{B_1}$ {在第 2 有效请求时隙必有顾客请求, 且新产生 l_2 个顾客, 在第 2 服务期产生顾客 m_2 个, $0 \leqslant l_2 \leqslant m_2 \leqslant j+1-m_1 \mid X_r = 0$} $\cdot P_c$ {在 $K-2$ 个有效请求时隙必有顾客请求, 在 $T_{r+1} - 2f = (K-2)f$ 个时隙新到顾客 $j+1-m_1-m_2$ 个 $\mid X_r = 0$}

$P_{B_1} = P_1$ {在第 2 有效请求时隙没有新到顾客, 原有顾客有 x_2 个请求, $1 \leqslant x_2 \leqslant m_1$; 在 s_2 时隙新到顾客 m_2 个, $0 \leqslant m_2 \leqslant j+1-m_1 \mid X_r = 0$} + P_2 {在第 2 有效请求时隙新到 l_2 个顾客, 原有顾客有 x_2 个请求, $0 \leqslant x_2 \leqslant m_1$; 在 s_2 时隙新到顾客 $m_2 - l_2$ 个, $1 \leqslant l_2 \leqslant m_2 \leqslant j+1-m_1 \mid X_r = 0$}

$$P_1 = \sum_{m_1=1}^{j+1} \sum_{m_2=0}^{j+1-m_1} (1-p_g)^{N-m_1} \cdot \sum_{x_2=1}^{m_1} C_{m_1}^{x_2} p_r^{x_2} (1-p_r)^{m_1-x_2} \cdot C_{N-m_1}^{m_2} (q_g^{f-1})^{N-m_1-m_2} (1-q_g^{f-1})^{m_2} \quad (6)$$

$$P_2\{\cdots\} = \sum_{m_1=1}^{j+1} \sum_{l_2=1}^{j+1-m_1} \sum_{m_2=l_2}^{j+1-m_1} C_{N-m_1}^{l_2} p_g^{l_2} (1-p_g)^{N-m_1-l_2} \cdot \sum_{x_2=0}^{m_1} C_{m_1}^{x_2} p_r^{x_2} (1-p_r)^{m_1-x_2} \cdot C_{N-m_1-l_2}^{m_2-l_2} (q_g^{f-1})^{N-m_1-m_2} (1-q_g^{f-1})^{m_2-l_2}$$

$$P_{B_1} = P_1\{\cdots\} + P_2\{\cdots\} \quad (7)$$

$P_c = P_{C_1}$ {在第 3 有效请求服务时隙必有顾客请求, 且产生 l_3 个顾客; 第 3 服务期产生顾客 m_3 个, $0 \leqslant l_3 \leqslant m_3 \leqslant j+1-m_1-m_2 \mid X_r = 0$}

$\cdot P_d$ {在 $K-3$ 个有效请求时隙必有顾客请求, 在 $T_{r+1} - 3f = (K-3)f$ 个时隙新到顾客 $j+1-m_1-m_2-m_3$ 个 $\mid X_r = 0$}

$P_{C_1} = P_1$ {在第 3 有效请求时隙没有新到顾客, 原有顾客有 x_3 个请求, $1 \leqslant x_3 \leqslant m_1 + m_2$; 在 s_3 时隙新到顾客 m_3 个, $0 \leqslant m_3 \leqslant j+1-m_1-m_2 \mid X_r = 0$} + P_2 {在第 3 有效请求时隙新到 l_3 个顾客, 原有顾客有 x_3 个请求, $0 \leqslant x_3 \leqslant m_1 + m_2$; 在 s_3 时隙新到顾客 $m_3 - l_3$ 个, $1 \leqslant l_3 \leqslant m_3 \leqslant j+1-m_1-m_2 \mid X_r = 0$}

$$P_1\{\cdots\} = \sum_{m_1=1}^{j+1} \sum_{m_2=0}^{j+1-m_1} \sum_{m_3=0}^{j+1-m_1-m_2} (1-p_g)^{N-m_1-m_2} \cdot \sum_{x_3=1}^{m_1+m_2} C_{m_1+m_2}^{x_3} p_r^{x_3} (1-p_r)^{m_1+m_2-x_3} \cdot C_{N-m_1-m_2}^{m_3} (q_g^{f-1})^{N-m_1-m_2-m_3} (1-q_g^{f-1})^{m_3}$$

$$P_2\{\cdots\} = \sum_{m_1=1}^{j+1} \sum_{m_2=0}^{j+1-m_1} \sum_{l_3=1}^{j+1-m_1-m_2} \sum_{m_3=l_3}^{j+1-m_1-m_2} \cdot C_{N-m_1-m_2}^{l_3} p_g^{l_3} (1-p_g)^{N-m_1-m_2-l_3} \cdot \sum_{x_3=0}^{m_1+m_2} C_{m_1+m_2}^{x_3} p_r^{x_3} (1-p_r)^{m_1+m_2-x_3} \cdot C_{N-m_1-m_2-l_3}^{m_3-l_3} (q_g^{f-1})^{N-m_1-m_2-m_3} (1-q_g^{f-1})^{m_3-l_3}$$

$$P_{C_1} = P_1\{\cdots\} + P_2\{\cdots\}$$

…

$P_m\{\cdots\} = P_{M_1}$ {第 M 有效请求时隙必有顾客请求, 且产生顾客 l_M 个, 第 M 服务期产生顾客 m_M 个, $0 \leqslant l_M \leqslant m_M \leqslant j + 1 - \sum_{n=1}^{M-1} m_n \mid X_r = 0$} $\cdot P_X$ {在 $K-M$ 个有效请求时隙必有顾客请求, $\sum_{n=1}^{M} m_n = j+1$, 不产生新顾客 $\mid X_r = 0$}

$P_{M1}=P_1\{$在第 M 有效请求时隙没有新到顾客, 原有顾客有 x_M 个请求, $1\leqslant x_M\leqslant\sum_{n=1}^{M-1}m_n$; 在 S_M 时隙新到顾客 m_M 个, $0\leqslant m_M\leqslant j+1-\sum_{n=1}^{M-1}m_n\mid X_r=0\}+P_2\{$ 在第 M 有效请求时隙新到 l_M 个顾客, 原有顾客有 x_M 个请求, $0\leqslant x_M\leqslant\sum_{n=1}^{M-1}m_n$; 在 S_M 时隙新到顾客 m_M-l_M 个, $1\leqslant l_M\leqslant m_M\leqslant j+1-\sum_{n=1}^{M-1}m_n\mid X_r=0\}$ (8)

$$P_1\{\cdots\}=\sum_{m_1=1}^{j+1}\sum_{m_2=0}^{j+1-m_1}\sum_{m_3=0}^{j+1-m_1-m_2}\cdots\sum_{m_M=0}^{j+1-\sum_{n=1}^{M-1}m_n}(1-p_g)^{N-\sum_{n=1}^{M}m_n}$$
$$\cdot\sum_{x_M=1}^{\sum_{n=1}^{M-1}m_n}C^{x_M}_{\sum_{n=1}^{M-1}m_n}p_r^{x_M}(1-p_r)^{\sum_{n=1}^{M-1}m_n-x_M}$$
$$\cdot C^{m_M}_{N-\sum_{n=1}^{M-1}m_n}(q_g^{f-1})^{N-\sum_{n=1}^{M}m_n}(1-q_g^{f-1})^{m_M}$$

$$P_2\{\cdots\}=\sum_{m_1=1}^{j+1}\sum_{m_2=0}^{j+1-m_1}\cdots\sum_{l_M=1}^{j+1-\sum_{n=1}^{M-1}m_n}\sum_{m_M=l_M}^{j+1-\sum_{n=1}^{M-1}m_n}C^{l_M}_{N-\sum_{n=1}^{M-1}m_n}p_g^{l_M}(1-p_g)^{N-\sum_{n=1}^{M}m_n-l_M}$$
$$\cdot\sum_{x_M=0}^{\sum_{n=1}^{M-1}m_n}C^{x_M}_{\sum_{n=1}^{M-1}m_n}p_r^{x_M}(1-p_r)^{\sum_{n=1}^{M-1}m_n-x_M}$$
$$\cdot C^{m_M-l_M}_{N-\sum_{n=1}^{M-1}m_n-l_M}(q_g^{f-1})^{N-\sum_{n=1}^{M}m_n}(1-q_g^{f-1})^{m_M-l_M}$$

$P_{M_1}=P_1\{\cdots\}+P_2\{\cdots\}$

$$P_x=[1-(q_r)^{j+1}]^{K-M}\cdot[(1-p_g)^{(K-M)f}]^{N-(j+1)}\tag{9}$$

$$P_{0j}=\sum_{K=1}^{\infty}P_kP_{A_1}P_{B_1}P_{C_1}\cdots P_{M_1}P_X\tag{10}$$

(2) $P_{ij}=0\quad j<i-1$

(3) $P_{ij}=P\{X_{r+1}=j\mid X_r=i\}\quad i>0,\ i\leqslant j\leqslant N-1$

$=P\{$在 $T_{r+1}=kf$ 时隙到达 $j-i+1$ 个顾客, 在 K 次有效请求时隙必有顾客请求, $1\leqslant K<\infty\mid X_r=i\}$

$=P_A\{$第 1 有效请求时隙必有顾客请求, 第 1 服务期产生顾客 m_1 个, $0\leqslant m_1\leqslant j+1-i\mid X_r=i\}\cdot P_a\{K-1$ 个有效请求时隙必有顾客请求, 在 $T_{r+1}-f=(K-1)f$ 个时隙产生顾客 $j+1-i-m_1$ 个 $\mid X_r=i\}$

仿照式(10)求解过程可得

$$p_{ij}=\sum_{K=1}^{\infty}P_k(P_{A1}+P_{A2})(P_{B1}+P_{B2})\cdots(P_{M1}+P_{M2})P_X\tag{11}$$

其中,

$$P_{A1}=(1-p_g)^{N-i}\sum_{x_1=1}^{i}C_i^{x_1}p_r^{x_1}(1-p_r)^{i-x_1}$$
$$\cdot\sum_{m_1=0}^{j+1-i}C^{m_1}_{N-i}(q_g^{f-1})^{N-i-m_1}(1-q_g^{f-1})^{m_1}$$

$$P_{A2}=\sum_{l_1=1}^{j-i+1}C^{l_1}_{N-i}p_g^{l_1}(1-p_g)^{N-i-l_1}\cdot\sum_{x_1=0}^{i}C_i^{x_1}p_r^{x_1}(1-p_r)^{i-x_1}$$
$$\cdot\sum_{m_1=l_1}^{j-i+1}C^{m_1}_{N-i-l_1}(q_g^{f-1})^{N-i-m_1}(1-q_g^{f-1})^{m_1-l_1}$$

$P_A=P_{A1}\{\cdots\}+P_{A2}\{\cdots\}$

$$P_{B1}=\sum_{m_1=0}^{j+1-i}(1-p_g)^{N-i-m_1}\sum_{x_2=1}^{i+m_1}C^{x_2}_{i+m_1}p_r^{x_2}(1-p_r)^{i+m_1-x_2}$$
$$\cdot\sum_{m_2=0}^{j+1-i-m_1}C^{m_2}_{N-i-m_1}(q_g^{f-1})^{N-i-m_1-m_2}(1-q_g^{f-1})^{m_2}$$

$$P_{B2}=\sum_{m_1=0}^{j+1-i}\sum_{l_2=1}^{j-i+1-m_1}C^{l_2}_{N-i-m_1}p_g^{l_2}(1-p_g)^{N-i-m_1-l_2}$$
$$\cdot\sum_{x_2=0}^{i+m_1}C^{x_2}_{i+m_1}p_r^{x_2}(1-p_r)^{i+m_1-x_2}$$
$$\cdot\sum_{m_2=l_2}^{j-i+1-m_1}C^{m_2}_{N-i-m_1-l_2}(q_g^{f-1})^{N-i-m_1-m_2}$$
$$\cdot(1-q_g^{f-1})^{m_2-l_2}$$

$P_B=P_{B1}\{\cdots\}+P_{B2}\{\cdots\}$

$$P_{M1}=\sum_{m_1=0}^{j+1-i}\sum_{m_2=0}^{j-i+1-m_1}\cdots\sum_{m_M=0}^{j-i+1-\sum_{n=1}^{M-1}m_n}(1-p_g)^{N-i-\sum_{n=1}^{M}m_n}$$
$$\cdot\sum_{x_M=1}^{i+\sum_{n=1}^{M-1}m_n}C^{x_M}_{i+\sum_{n=1}^{M-1}m_n}p_r^{x_M}(1-p_r)^{i+\sum_{n=1}^{M-1}m_n-x_M}$$
$$\cdot C^{m_M}_{N-i-\sum_{n=1}^{M-1}m_n}(q_g^{f-1})^{N-i-\sum_{n=1}^{M}m_n}(1-q_g^{f-1})^{m_M}$$

$$P_{M2}=\sum_{m_1=0}^{j+1-i}\sum_{m_2=0}^{j-i+1-m_1}\cdots\sum_{l_M=0}^{j-i+1-\sum_{n=1}^{M-1}m_n}\sum_{m_M=l_M}^{j-i+1-\sum_{n=1}^{M-1}m_n}$$
$$\cdot C^{l_M}_{N-i-\sum_{n=1}^{M-1}m_n}p_g^{l_M}(1-p_g)^{N-i-\sum_{n=1}^{M-1}m_n-l_2}$$
$$\cdot\sum_{x_M=0}^{i+\sum_{n=1}^{M-1}m_n}C^{x_M}_{i+\sum_{n=1}^{M-1}m_n}p_r^{x_M}(1-p_r)^{i+\sum_{n=1}^{M-1}m_n-x_M}$$
$$\cdot C^{m_M}_{N-i-\sum_{n=1}^{M-1}m_n-l_M}(q_g^{f-1})^{N-i-\sum_{n=1}^{M}m_n}(1-q_g^{f-1})^{m_M-l_M}$$

$P_M=P_{M1}\{\cdots\}+P_{M2}\{\cdots\}$

$$P_x=[1-(q_r)^{j+1}]^{K-M}\cdot[(1-p_g)^{(K-M)f}]^{N-(j+1)}\tag{12}$$

3.3 顾客积累数的平均值 $\bar{A}_i$

设 r 时刻系统顾客数为 i, 则

$$\bar{A}_i=\sum_{j=i}^{N-1}j\sum_{kf=1}^{T_{r+1}}P_{ij}^{kf}=\sum_{j=i}^{N-1}\sum_{kf=1}^{T_{r+1}}jP_{ij}^{kf}\tag{13}$$

其中, p_{ij}^{kf} 表示经 kf 个时隙系统顾客数由 $i\rightarrow j$ 的概率, 而当 T_{r+1} 有限, kf 取值 $1\rightarrow T_{r+1}$ 时, $\sum_{kf=1}^{T_{r+1}}p_{ij}^{kf}=P_{ij}$, $\bar{A}_i=\sum_{j=i}^{N-1}jP_{ij}$

3.4 绝对概率 π_i

由前面的分析可知, 在观察时点系统可构成嵌入马尔科夫链, 即存在

$$[\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_{N-1}] = [\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1}][P_{ij}] \quad (14)$$

$$[P_{ij}] = \begin{vmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots & P_{0(N-2)} & P_{0(N-1)} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1(N-2)} & P_{1(N-1)} \\ 0 & P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2(N-2)} & P_{2(N-1)} \\ 0 & 0 & P_{32} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & P_{N(N-1)} \end{vmatrix}$$

π_i 表示平衡状态下, 正确服务顾客离开系统时刻, 系统有 i 个顾客的概率, 考虑到 $\sum_{i=0}^{N-1} \pi_i = 1$, 由上面所示矩阵可得

$$\pi_i = \sum_{m=0}^{i+1} P_{mi}\pi_m$$
$$\pi_{i+1} = \left(\pi_i - \sum_{m=0}^{i} P_{mi}\pi_m\right) / P_{(i+1)i} \quad (15)$$

3.5　平衡状态下的平均顾客数 $\bar{M}$

在 1 个离开期求平均, 得

$$\bar{M} = \sum_{i=0}^{N-1} (i\pi_i + \bar{A}_i \pi_i) / (kf) \quad (16)$$

3.6　平均滞留时间 W

因为在平稳状态下每 1 时隙平均有 $\bar{M}$ 顾客, 所以每 1 顾客的平均滞留时间为

$$W = \bar{M} \cdot kf = \sum_{i=0}^{N-1} (i\pi_i + \bar{A}_i \pi_i) \quad (17)$$

4　模拟试验及结果分析

根据前面已建立的数学模型, 可以设计出仿真实验的流程图, 如图3 所示. 本实验使用 C 语言编写, 设定的参数有顾客源总数 N, 顾客产生的概率 P_g、顾客请求服务的概率 p_r、一个服务期的长度 f 等.

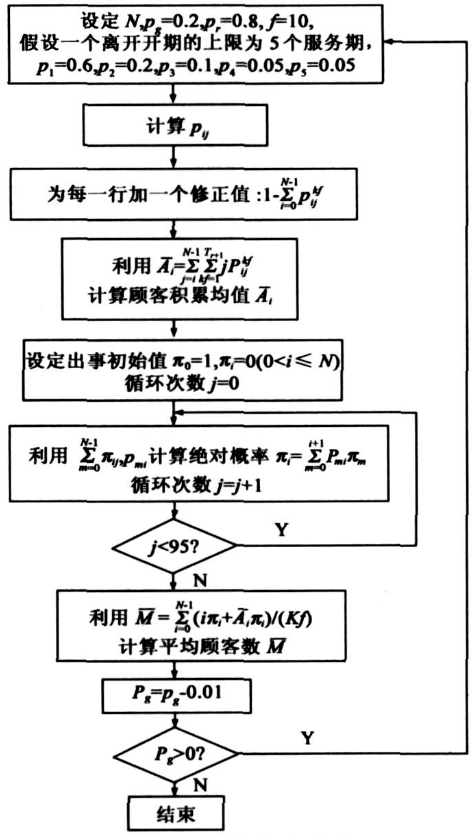
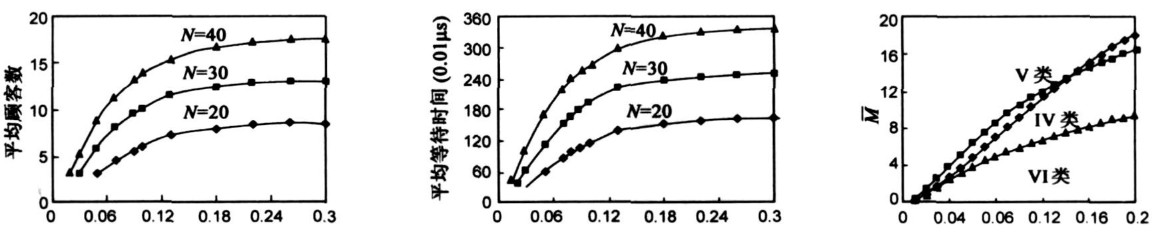


图 3　仿真实验流程图

本实验的程序包括了 11 个函数和 1 个主函数, 程序清单可以索取. 在设定重负载 $p_r = 0.9, f = 10, K = 5$ 的条件下来分析该模型的性能, 分别就 $N = 20, N = 30$ 和 $N = 40$ 三种情况做了实验, 考虑重负载, P_g 取值大于 0.2 实验结果如图 4 所示. 其中(a)为 P_g-平均顾客数曲线, (b)为 P_g-平均等待时间曲线, (c)为Ⅵ类、Ⅳ类、Ⅴ类模型试验比较图.



(a) 平均顾客数曲线　　(b) 平均等待时间曲线　　(c) 三种模型比较

图 4　实验结果分析图

比较分析和结论:

(1) 由图 4(a)可以看出, 当某时隙产生顾客的概率 P_g 增加时, 系统平均顾客数曲线成上升趋势, 这种趋势保持在 $P_g < 0.18$ 范围内, 当 $P_g > 0.18$ 时, 平均顾客数曲线逐渐趋于饱和, 系统平均顾客数的值受 P_g 值变化影响逐渐减少. 因此, 若想要通过减少 P_g 值的办法来减少系统顾客数, 则要把 P_g 值控制在 0.18 以内, 但 P_g 不能过小, 否则有可能离开重负载条件.

(2) 由图 4(b)可见, 顾客的平均等待时间也是随着 P_g 的增加而增加, 与图(a)的走势是一样的. 为了减少平均等待时间, 也要适当减小 P_g.

(3) 比较三类模型的仿真实验结果如图 4(c)所示, Ⅵ类模型具有明显的优势. 在顾客第一次请求为随机请求, 且再次请求也为随机请求的情况下, Ⅴ类模型

中,顾客若服务失败则重新服务直至服务成功,对于该顾客来说,再次服务无需请求,而对于其他未被选择的顾客来说,自然等待时间要变长,所以其平均等待时间大于Ⅵ类模型.总之,在同是重负载的网络环境下,与Ⅴ类、Ⅳ类模型相比,Ⅵ类模型的平均延迟时间更短.

参考文献:

[1] Lu Zhaoyi, Tadao Saito. Star type local area network access control[J]. Science in China (series A), 1990, 33(9): 1123-1131.

[2] 逯昭义,齐藤忠夫.改进型多星 LAN[J].电子学报,1993,21(11):99-103.
LU Zhao-yi, Tadao Saito. An improved type of multi-star LAN [J]. Acta Electronica Sinica, 1993, 21(11): 99-103. (in Chinese)

[3] Lu Zhaoyi, Sun Lijun. A mathematical model for access mode of contention-collision cancellation in a star LAN[J]. Journal of Electronics, 2004, 21(11): 37-47.

[4] Lu Zhaoyi, Lu Mai, Zhao Dongfeng, Wang Lihong. On the Ⅱnd model of contention-collision elimination access mode in star LAN[J]. Applied Math Modeling, 2003, 27: 899-911.

[5] Lu Zhaoyi, Lu Mai, Zhao Dongfeng. A special random selective services queuing model for access to a star LAN[J]. Applied Math, Modeling, 1997, 21: 15-20.

[6] Lu Zhaoyi, Sun Lijun, et al. The mathematical modeling for the access mode of the Ⅳth system model to a multiple star LAN [J]. Applied Math, Modeling, 2006, 30: 367-385.

[7] Lu Zhaoyi, Zhang Jianshu, Lu Mai. The mathematical multiple modeling for the access mode of the Ⅴth system model to a star LAN[J]. Applied Math, Modeling, 1999, 23: 231-239.

[8] 逯昭义.竞争-冲突淘汰存取方式Ⅰ类系统模型性能评价[J].电子学报,1995,23(9):115-117.
LU Zhao-yi. Analysis on Ⅰ type model of access mode of the contention-collision cancellation in LAN [J]. Acta Electronica Sinica, 1995, 23(9): 115-117. (in Chinese)

作者简介:

逯昭义 男,教授,博士生导师,1942年生于甘肃省天水市泰安县.1966年兰州大学无线电物理专业毕业后留校任教,1994年被聘为教授,且开始享受国务院政府特贴.1996年被引进到青岛大学计算机系任教,1999年评为"山东省专业技术拔尖人才".已在《中国科学》等刊物发表论文110余篇,其中被SCI、EI收录30余篇,出版《计算机通信网信息量理论》等8部著作.主要研究方向:①计算机网络体系结构,②通信业务量理论,③计算机网络复杂性等.

杨兴梅 女,1981年7月出生于山东蓬莱.2005年在青岛大学信息工程学院获得硕士学位.主要研究方向为计算机网络与通信.现在青岛市人口计生委信息中心工作.
E-mail: xingmeiyang@hotmail.com

王 超 男,1982年9月出生于山东胶南,在读硕士.主要研究方向为计算机网络与通信.
E-mail: chao19821982@163.com